13/11/2018

$Y \leq V_{\delta.\chi.}$

$\mathbb{R}^2 \geq \underset{\substack{\text{από το}\\(0,0)}}{\text{ευθεία}} \geq \{(0,0)\}$

$\mathbb{R}^3 \geq \underset{\substack{\text{από το}\\(0,0)}}{\text{επίπεδο}} \geq \underset{\substack{\text{από το}\\(0,0,0)}}{\text{ευθεία}} \geq \{(0,0,0)\}$

π.χ. Δίνεται το σύνολο $Y = \{\alpha(1,1,1) + b(0,-1,1) \mid \alpha, b \in \mathbb{R}^3\}$

γραμμικός συνδυασμός των $(1,1,1)$ και $(0,-1,1)$

Για να είναι $Y \leq \mathbb{R}^3$ πρέπει να ισχύουν οι ιδιότητες

$\alpha(1,1,1) + b(0,-1,1) + \alpha'(1,1,1) + b'(0,-1,1) = (\alpha+\alpha')(1,1,1) +$
$+ (b+b')(0,-1,1) \in Y$

$c \cdot (\alpha(1,1,1) + b(0,-1,1)) = c\cdot\alpha(1,1,1) + c\cdot b(0,-1,1) \in Y$

Άρα $Y \leq \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \in Y \Rightarrow \exists\ \alpha$ και $b : (x,y,z) = \alpha(1,1,1) + b(0,-1,1)$

Τα α και b εξαρτούνται από τα x,y,z

$(x,y,z) = (\alpha + b0, \alpha - b, \alpha + b)$

$x = \alpha$

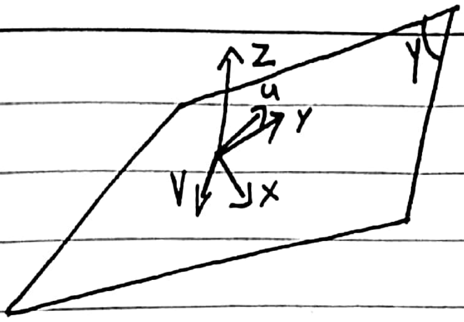
$y = \alpha - b \Rightarrow b = \alpha - y = x - y$

$z = \alpha + b \Rightarrow z = x + x - y \Rightarrow z = 2x - y \Rightarrow 2x - z - y = 0$

Εξίσωση επιπέδου.

Άρα το Y είναι ένα επίπεδο.

$Y = \{\alpha(1,1,1) + b(0,-1,1) \mid \alpha, b \in \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) \mid 2x - y - z = 0\}$




Απαραιτήτως χρειάζεται τα u και v και κάθε άλλο στοιχείο του Y είναι γραμμικός συνδυασμός των u και v.

Τα u, v ονομάζονται βάση.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $S = \{u_i, u_k\} \leq V$ με V δ.χ.

Αν $u \in V$ και υπάρχουν αριθμοί $\alpha_i, \dots, \alpha_k$ : $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$, τότε το u καλείται γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S.

Έστω V δ.χ. και $S \leq V$. Αν κάθε στοιχείο του V γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S. Θα λέμε ότι το S γεννά το V.

Γράφουμε $\langle S \rangle = V$, δηλ. το σύμβολο $\langle S \rangle$ περιέχει όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων τους.

π.χ. Αν $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ τότε
$\langle S \rangle = \{\alpha_1 u_1, \dots, \alpha_k u_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$

Προσοχή: Το S μπορεί να είναι άπειρο
Αλλά ο γραμμικός αριθμός είναι πεπερασμένος

Από το προηγούμενο π.χ. $Y = \langle (1,1,1), (0,-1,0) \rangle$

Πρόταση: Αν $S \leq V$ τότε $\langle S \rangle \leq V$

Απόδειξη: $S=\{u_1,\ldots,u_n\}\subseteq V$

Τότε $\langle S\rangle=\{a_1u_1+\ldots+a_nu_n \mid a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}\}$

$(a_1u_1+\ldots+a_nu_n)+(a_1'u_1+\ldots+a_n'u_n)=(a_1+a_1')u_1+\ldots+(a_n+a_n')u_n\in$

$\in\langle S\rangle$

$c\cdot(a_1u_1+\ldots+a_nu_n)\in\langle S\rangle\Rightarrow\langle S\rangle\leq V$

ΕΡΩΤΗΜΑ

$S\subseteq V$ δ.χ. και $\langle S\rangle=V$

π.χ. $S=\mathbb{R}^2\subseteq\mathbb{R}^2$ και $\langle\mathbb{R}^2\rangle=\mathbb{R}^2$

- Πότε το S ελάχιστο;
- Πότε το S μοναδικό; ΟΧΙ

Ας υποθέσουμε ότι $S=\{u_1,\ldots,u_n\}\subseteq V$ και $V=\langle S\rangle$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $S\subseteq V$ δ.χ. $(\vec{0}\notin S)$

Αν κανένα στοιχείο δεν μπορεί να γραφεί σαν γραμ. συνδυασμός των υπολοίπων, τότε θα καλείται γραμ. ανεξάρτητο.

- Πως θα το ελέγχω;

Έστω $S=\{u_1,\ldots,u_n\}$. Γνωρίζω ότι $\forall u_i\in S$

$\nexists$ αριθμοί $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$: $u_i=a_1u_1+\ldots+a_nu_n$.

Τα $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ δεν είναι όλα μηδέν.

$\bar{0} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$.

Γενικότερα εάν $\bar{0} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ τότε $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ γιατί αλλιώς θα μπορούν τα στοιχεία να γραφούν ως γραμμικός συνδυασμός μεταξύ τους.

Άρα στο συγκεκριμένο παράδειγμα το $\bar{0}$ είναι γραμ. συνδ. των υπολοίπων.

Π.χ. Εξετάσετε αν το σύνολο:

$S = \{(1,1,1), (2,2,1), (-1,0,1), (0,1,1)\}$ είναι γραμ. ανεξάρτ.

Αν δεν είναι να βρείτε ένα γρ. ανεξ. υποσύνολο του $S \subseteq \mathbb{R}^3$

$S$ γρ. ανεξ. $\Leftrightarrow (0,0,0) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(2,2,1) + \alpha_3(-1,0,1) + \alpha_4(0,1,1)$

Θα πρέπει $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = (0,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

Αν βρούμε μη-μηδενικές λύσεις το $S$ είναι γραμ. εξαρτ.

$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$

$\alpha_4 = -\alpha_1$

$0 = \cancel{\alpha_3} + \alpha_2 + \alpha_1 + 2\alpha_2 - \cancel{\alpha_1}$

$0 = \alpha_1 + 3\alpha_2$

$\alpha_1 = -3$, $\alpha_4 = 3$

$\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$

Άρα $(0,0,0) = -3(1,1,1) + 1(2,0,1) - 1(-1,0,1) + 3(0,1,1)$

$\underbrace{(2,0,1)}_{\downarrow} = \underline{3(1,1,1) + (-1,0,1) - 3(0,1,1)}$

γραμ. συνδυασμός των

Οπότε $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$ όπου $S' = \{(1,1,1), (-1,0,1), (0,1,1)\}$

Είναι το $S'$ γραμ. ανεξ.

$(0,0,0) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(-1,0,1) + \alpha_3(0,1,1)$

$(0,0,0) = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$

άρα $0 = \alpha_1 - \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

$0 = \alpha_2 + \alpha_3 \Leftrightarrow \alpha_1 = -\alpha_3$

$0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$

Άρα το $S'$ γραμ. ανεξ. Μήπως το $S$ γεννά τον $\mathbb{R}^3$;

$\langle S' \rangle = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \oplus$

$\{\alpha(1,1,1) + b(-1,0,1) + \gamma(0,1,1) \mid \alpha, b, \gamma \in \mathbb{R}\}$

$\oplus$ Κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ γράφεται σαν γρ. συνδ. του $S'$

$(x,y,z) = \alpha(1,1,1) + b(-1,0,1) + \gamma(0,1,1)$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (\alpha - b, \alpha + \gamma, \alpha + b + \gamma)$

$x = \alpha - \beta \Rightarrow \alpha = x + \beta = x + z - y$

$y = \alpha + \gamma \Big\} \Rightarrow \gamma = y - \alpha = y - x - z + y = 2y - x - z$

$z = \alpha + \beta + \gamma \Big\} \Rightarrow \beta = z - y$

Δηλαδή, για το $(x,y,z)$ μπορούμε να βρούμε αριθμούς $\alpha = x+z-y$, $\beta = z-y$, $\gamma = 2y-x-z$ ώστε το $(x,y,z)$ να γράφεται σαν γραμ. συνδ. των διανυσμάτων του $S'$.

δηλ. $(x,y,z) = (x+z-y)(1,1,1) + (z-y)(-1,0,1) + (2y-x-z)(0,1,1)$

Τότε $\langle S' \rangle = \mathbb{R}^3$

Το $S'$ αποτελεί βάση του $\mathbb{R}^3$ διότι τον γεννά και είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Γνωρίζεις άλλη βάση του $\mathbb{R}^3$;

$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \rightarrow$ η πιο απλή βάση στον $\mathbb{R}^3$

(Η βάση $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ καλείται κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω V. δ.χ. και $S \subseteq V$. Αν το $S$ γεννά το $V$, $\langle S \rangle = V$ και το $S$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε θα καλείται βάση του $V$.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Είναι μοναδική; ΟΧΙ

Π.χ. Δείξτε ότι $\{x^2+1, x-1, 2\}$ αποτελεί βάση του $P_2 \{\alpha x^2 + \beta x + \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

Γεννά : $\alpha x^2+\beta x+\gamma = \kappa(x^2+1)+\lambda(x-1)+2\mu$
Βρες τα $\kappa,\lambda,\mu$ συναρτήσει των $\alpha,\beta,\gamma$

$\alpha x^2+\beta x+\gamma = \kappa x^2+\lambda x+(\kappa-\lambda+2\mu)$

$\alpha=\kappa$ ⊕
$\beta=\lambda$
$\gamma=\kappa-\lambda+2\mu \Rightarrow 2\mu=\gamma-\kappa+\lambda=\gamma-\alpha+\beta$
$\mu=\frac{1}{2}(\gamma-\alpha+\beta)$

Άρα το $\{x^2+1, x-1, 2\}$ γεννά το $P_2$
Είναι και γραμμικά ανεξάρτητο.

$0=\kappa(x^2+1)+\lambda(x-1)+2\mu$
Από το ⊕ $\kappa=\alpha=0$
$\lambda=\beta=0$
$\mu=\frac{1}{2}(\gamma-\alpha+\beta)=0$

$P_2=\langle S'\rangle$ $S'=\{x^2,x,1\}$

(Για τα πολυώνυμα τα στοιχεία θα είναι όσα ο εκθέτης +1. Δηλ. στο παραπάνω $P_2$ είχα με 3 στοιχεία)

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω V δ.χ. και $S=\{u_1,\dots,u_n\}$ μια βάση του. Τότε κάθε στοιχείο του V γράφεται μοναδικά ως προς τη βάση S

Απόδειξη: S βάση $\Leftrightarrow$ $\langle S\rangle=V$ S γραμ. ανεξ.

$\langle S \rangle = V \Rightarrow \forall v \in V \; \exists$ αριθμοί $a_1, \dots, a_n$
ώστε $v = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$

Θ.δ.ο. οι αριθμοί $a_1, \dots, a_n$ είναι μοναδικοί.

Υποθέτουμε ότι $v$ έχει και άλλη αναπαράσταση

$$v = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$
$$v = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$$

$$\bar{0} = (a_1 - b_1) u_1 + \dots + (a_n - b_n) u_n \quad \Big\} \quad \begin{array}{l} a_1 - b_1 = 0 \\ a_2 - b_2 = 0 \\ \vdots \\ a_n - b_n = 0 \end{array}$$

$S$ γραμ. ανεξ.